Exercice 1 **5 points**

Partie A

1. Dérivons la fonction u : $\forall t \in \mathbb{R},\quad u'(t) = 1 \times \mathrm{e}^{-0,4t} + t \times (-0,4)\,\mathrm{e}^{-0,4t}$

$$= \mathrm{e}^{-0,4t} - 0,4t\,\mathrm{e}^{-0,4t}$$
$$= (1 - 0,4t)\,\mathrm{e}^{-0,4t}$$

Vérifions que u est solution de (E) :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \begin{aligned} u'(t) + 0,4u(t) &= (1-0,4t)\,\mathrm{e}^{-0,4t} + 0,4 \times t\,\mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= \mathrm{e}^{-0,4t} - 0,4t\,\mathrm{e}^{-0,4t} + 0,4t\,\mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= \mathrm{e}^{-0,4t} \end{aligned}$$

Donc u est bien solution de (E).

2. **a.** Soit $g = f - u$ avec g solution de (H).

Comme g est une solution de (H), on a : $\forall t \in \mathbb{R},\quad g'(t) + 0,4g(t) = 0$.

Or $g = f - u$, donc $g' = f' - u'$.

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \begin{aligned} g'(t) + 0,4g(t) = 0 &\iff f'(t) - u'(t) + 0,4\big(f(t) - u(t)\big) = 0 \\ &\iff f'(t) - u'(t) + 0,4f(t) - 0,4u(t) = 0 \\ &\iff f'(t) + 0,4f(t) = u'(t) + 0,4u(t) \\ &\iff f'(t) + 0,4f(t) = \mathrm{e}^{-0,4t} \end{aligned}$$

La dernière équivalence se justifie car u étant une solution particulière de (E), on a bien : $\forall t \in \mathbb{R},\quad u'(t) + 0,4u(t) = \mathrm{e}^{-0,4t}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Donc f est solution de (E).

b. L'équation (H) : $y' + 0,4y = 0$ est de la forme $y' = -0,4y$.

Les solutions sont les fonctions de la forme : $g : t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

c. D'après les questions précédentes, f est solution de (E) si et seulement si $g = f - u$ est solution de (H).

Donc si et seulement si on a : $\forall t \in \mathbb{R},\quad f(t) - u(t) = C\,\mathrm{e}^{-0,4t}$

Les solutions de (E) sont les fonction f telles que : $f : t \longmapsto t\,\mathrm{e}^{-0,4t} + C\,\mathrm{e}^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire les fonction f telles que : $f : t \longmapsto (t + C)\,\mathrm{e}^{-0,4t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

d. Ici, on introduit une condition initiale, on veut avoir : $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\iff (0 + C)\,\mathrm{e}^{0} = 1 \\ &\iff C = 1 \end{aligned}$$

Donc la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = (t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}$.

Partie B

On remarque que la fonction f présentée est la solution que nous avons identifiée à la **partie A**.

1. **a.** f étant une solution de l'équation (E) sur $[0~;~6]$, on a :

$$f' + 0,4f = \mathrm{e}^{-0,4t} \iff f' = -0,4f + \mathrm{e}^{-0,4t}$$

Et donc : $\forall t \in [0~;~6]$: $\begin{aligned} f'(t) &= -0,4f(t) + \mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= -0,4(t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t} + \mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= (-0,4t - 0,4 + 1)\,\mathrm{e}^{-0,4t} \\ &= (-0,4t + 0,6)\,\mathrm{e}^{-0,4t} \end{aligned}$

Remarque : on peut aussi obtenir cette expression en dérivant l'expression donnée pour f avec les formules classiques de dérivation.

b. Étude du signe de $f'(t)$ sur $[0~;~6]$:

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc $\mathrm{e}^{-0,4t} > 0$ pour tout t, donc le signe de $f'(t)$ est celui de $-0,4t + 0,6$.

$$\begin{aligned} -0,4t + 0,6 > 0 &\iff -0,4t > -0,6 \\ &\iff t < \frac{-0,6}{-0,4} \quad \text{car } -0,4 < 0 \\ &\iff t < 1,5 \end{aligned}$$

Tableau de variations :

x	0		1,5		6
signe de $f'(x)$		+	0	−	
variations de f	1	↗	$2,5\,\mathrm{e}^{-0,6}$	↘	$7\,\mathrm{e}^{-2,4}$

Avec $f(0) = 1$, $f(1,5) = 2,5\,\mathrm{e}^{-0,6} \approx 1,37$ et $f(6) = 7\,\mathrm{e}^{-2,4} \approx 0,63$.

2. **a.** Sur $[0~;~1,5]$, f est strictement croissante avec $f(0) = 1 > 0,7$: l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1,5~;~6]$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante et 0,7 est une valeur intermédiaire entre $f(1,5) \approx 1,37$ et $f(6) \approx 0,63$.

D'après le corollaire aux théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution α sur $[1,5~;~6]$.

Finalement, l'équation $f(t) = 0,7$ admet bien une unique solution sur $[0~;~6]$.

b. Par approximations successives, ou en utilisant le solveur de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 5,62$ heures (on donne une approximation au centième près, car la précision attendue est à la minute, qui est un soixantième d'heure).

$0,62 \times 60 \approx 37$ minutes.

La personne est en hypoglycémie au bout de 5 heures et 37 minutes après le repas.

3. **a.** Calcul de $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^6 (t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\,\mathrm{d}t$.

On pose, pour tout t dans $[0~;~6]$: $u(t) = t + 1$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-0,4t}$

puis $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{-0,4}\,\mathrm{e}^{-0,4t} = -2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t}$.

Les fonctions u, u', v et v' sont continues sur $[0~;~6]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^6 (t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^6 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \Big[u(t)v(t)\Big]_0^6 - \int_0^6 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \Big[(t+1)\times\left(-2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t}\right)\Big]_0^6 - \int_0^6 1\times\left(-2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \Big[-2,5(t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\Big]_0^6 + 2,5\int_0^6 \mathrm{e}^{-0,4t}\,\mathrm{d}t\\
&= \left(-2,5\times 7\,\mathrm{e}^{-2,4}\right) - \left(-2,5\times 1\times\,\mathrm{e}^{0}\right) + 2,5\Big[-2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t}\Big]_0^6\\
&= -17,5\,\mathrm{e}^{-2,4} + 2,5 + 2,5\left[\left(-2,5\,\mathrm{e}^{-2,4}\right) - \left(-2,5\,\mathrm{e}^{0}\right)\right]\\
&= -17,5\,\mathrm{e}^{-2,4} + 2,5 - 6,25\,\mathrm{e}^{2,4} + 6,25\\
&= -23,75\,\mathrm{e}^{-2,4} + 8,75
\end{aligned}$$

b. La glycémie moyenne pendant la période de six heures est donc donnée par la valeur moyenne de la fonction f (qui donne la glycémie instantanée en fonction du temps) sur l'intervalle $[0~;~6]$ (le temps étant mesuré en heures). On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6-0}\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{6}\left(-23,75\,\mathrm{e}^{-2,4} + 8,75\right)\\
&= \frac{95\,\mathrm{e}^{-2,4}+35}{24} \quad \text{(ceci est la valeur exacte)}.\\
&\approx 1,099 \quad \text{valeur approchée au millième}
\end{aligned}$$

La glycémie moyenne lors des six heures suivant le repas est donc d'environ $1,10\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{L}^{-1}$.

c. Comme f est solution de (E), on a : $f' + 0,4f = \mathrm{e}^{-0,4t}$.

En définissant, comme à la question **3. a.**, les fonctions v' et v par :

$v'(t) = \mathrm{e}^{-0,4t}$ et $v(t) = -2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t}$, on a :

$$\begin{aligned}
f' + 0,4f = \mathrm{e}^{-0,4t} &\iff f' + 0,4f = v'\\
&\iff 0,4f = v' - f'\\
&\iff f = 2,5(v' - f')
\end{aligned}$$

On en déduit qu'une primitive de f peut s'exprimer sous la forme :

$F : t \longmapsto 2,5\big(v(t) - f(t)\big)$

Soit : $\forall t \in [0~;~6]$,

$$\begin{aligned}
F(t) &= 2,5\big(-2,5\,\mathrm{e}^{-0,4t} - (t+1)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\big)\\
&= 2,5\big(-2,5 - (t+1)\big)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\\
&= 2,5\big(-3,5 - t\big)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\\
&= \big(-8,75 - 2,5t\big)\,\mathrm{e}^{-0,4t}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[\big(-8,75 - 2,5t\big)\,\mathrm{e}^{-0,4t}\Big]_0^6\\
&= (-8,75 - 2,5\times 6)\ \mathrm{e}^{-0,4\times 6} - (-8,75 - 2,5\times 0)\ \mathrm{e}^{-0,4\times 0}\\
&= -23,75\,\mathrm{e}^{-2,4} + 8,75
\end{aligned}$$

Cela confirme bien le résultat obtenu à la question **3. a.**.